

ANÁLISIS DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA ENSEÑAR DE PROFESORES EN FORMACIÓN

Tulio R. Amaya de Armas, Juan Barboza Rodríguez

Universidad de Sucre (Colombia)

tuama1@hotmail.com, juan.barboza@unisucra.edu.co

Palabras clave: Funciones, registros de representación, profesores en formación.

Key words: Functions, representation registers, teachers in training

RESUMEN: En este trabajo se reportan los hallazgos de un trabajo realizado con 90 estudiantes de Licenciatura en Matemáticas a los que se les pidió resolver un cuestionario sobre funciones. Los resultados evidencian ciertas debilidades formativas de los futuros profesores en el manejo de la función: en el diseño y ejecución de estrategias que permitan poner los contenidos en un lugar comprensible para los estudiantes; con su reconocimiento en el contexto donde se les presentó; con su aplicación y con el uso de recursos apropiados para hacerlo; para identificar sus elementos y relacionarlos. En general se nota en los estudiantes que hacen poco uso de los diferentes modos de expresión, tales como el verbal, el gráfico o el simbólico, así como de las transformaciones tipo conversión o tipo tratamiento entre los registros de una función; lo que denota que el nivel del lenguaje matemático que usan no es el más adecuado.

ABSTRACT: This work report the findings of an activity carried out with 90 students of Bachelor of Mathematics who had to solve a questionnaire functions. The results show some weaknesses in training teachers in the management function in the design and implementation of strategies to put the contents in an understandable place for students; with its recognition in the context in which it was presented to them; its application and use appropriate to do so; to identify and relate elements. It is observed that students make little use of the different modes of expression, such as verbal, graphic or symbolic as well as the type of treatment type conversion or transformations between registers of a function; which shows that the level of mathematical language they use is not the best.

■ INTRODUCCIÓN

Es deseable que el profesor en su quehacer esté preparado y dé todo de sí para ayudar a los estudiantes a conectar lo aprendido con la realidad, de tal forma que se provean condiciones óptimas para que ese aprendizaje tenga las mayores probabilidades de éxito. En particular, el trabajo escolar con funciones ha sido problemático desde su concepción hasta sus procesos de enseñanza, quizás en razón de que se acostumbra privilegiar el trabajo procesual y algorítmico sobre el conceptual, primando los procesos y tareas de tipo algebraicos sobre cualquier otros. Esto ha originado que tanto a estudiantes como a profesores les cueste hacer transformaciones tipo conversiones y por tanto sus respuestas las deriven de alguna transformación tipo tratamiento, y en las escasas ocasiones en que realizan una conversión, recurren al registro algebraico, con frecuencia privilegiado en las clases (Guzmán, 1998). En lo reportado por Guzmán se aprecia, en los profesores, una falta de coordinación al tratar de establecer conexiones entre las diferentes representaciones de cada uno de los registros puestos en juego.

Según Peirce (1974) para que una persona pueda representar un objeto matemático, con el fin de comprenderlo, debe establecer fuertes conexiones entre los signos que utiliza para hacerlo. Y las mismas experiencias de las personas ya vienen semiotizadas, es decir, cualquier proceso con intención comunicativa lleva asociado, por naturaleza su sistema de signos. Además, cualquier representación de un objeto matemático en cualquier registro es un modelo del objeto. Pero no todas las representaciones contienen la misma información, hay información entre representaciones de un objeto en diferentes registros donde algunos elementos pueden coincidir, y en otros complementarse, al respecto Duval (2004) considera importante el recurso a varios registros para facilitar la comprensión del concepto estudiado, y en ese mismo sentido D'Amore (2009) señala que en matemáticas, la adquisición conceptual de un objeto pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas

Shulman (2005), Ball, Thames y Phelps (2008) y Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006) sugieren respecto al conocimiento de un profesor que no es solo el conocimiento de los contenidos por un lado y el conocimiento de la pedagogía por el otro, sino una especie de amalgama del conocimiento de los contenidos y la pedagogía que es fundamental para su enseñanza. Ball, Thames y Phelps (2008) proponen seis dominios del conocimiento matemático para enseñar que debe dominar cualquier profesor de matemáticas:

Dominio 1. Conocimiento común del contenido: es el que poseen las personas que usan las matemáticas en cualquier ámbito científico o profesional, no solo de enseñanza. Este dominio involucra el conocimiento y la habilidad que nos permite obtener una respuesta correcta al momento de resolver problemas matemáticos. *Dominio 2. Conocimiento en el horizonte matemático:* permite establecer la manera en que los contenidos matemáticos se relacionan con otros en el currículo y los requerimientos académicos mínimos para el abordaje de un tema determinado, por lo tanto le indica al profesor cuando avanzar o retroceder, este dominio es el que permite establecer la coherencia vertical y horizontal entre los contenidos curriculares de matemáticas. *Dominio 3. Conocimiento especializado del contenido:* es el conocimiento matemático que atiende las especificidades que sólo son atinentes a la acción de enseñar, a las adecuaciones realizadas para transformar un contenido disciplinar en un contenido enseñable. *Dominio 4. Conocimiento del contenido y de los estudiantes:* es el conocimiento que combina el saber acerca

de los estudiantes y el conocer acerca de las matemáticas. Integra conocimiento sobre la cognición de los alumnos y los procesos matemáticos que devienen en ellos. *Dominio 5. Conocimiento del contenido y de la enseñanza:* es el conocimiento matemático para el diseño de tareas, cada una de las cuales requiere una interacción entre la comprensión matemática específica y de las cuestiones pedagógicas que afectan el aprendizaje de los estudiantes, es el conocimiento que permite hacer las transposiciones didácticas. *Dominio 6. Conocimiento del contenido y del currículum:* comprende los fundamentos, enfoques y organización vinculados con los programas y los materiales didácticos diseñados para la enseñanza de asignaturas y contenidos particulares en un nivel educativo determinado.

En la investigación desarrollada se tuvo como objetivo evaluar la dimensión matemática del conocimiento didáctico matemático de profesores en formación al hacer transformaciones de las representaciones de una función. Para ello, se analizan las asociaciones entre las respuestas dadas a cada ítem con el grupo de donde estas provienen, para lo que se usan tablas de contingencias con el coeficiente Chi-Cuadrado de Pearson a un nivel de significancia del 5% ($\alpha = 0,05$). Aquí solo se analizan las respuestas dadas a dos de las preguntas planteadas en el cuestionario.

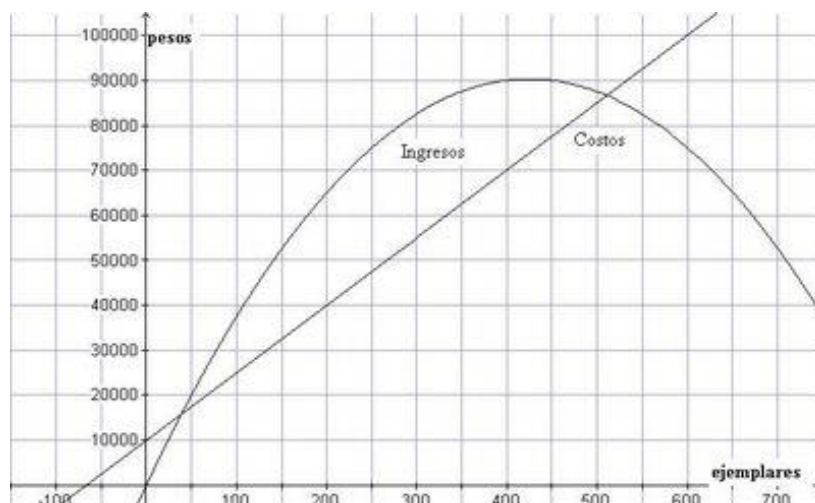
■ ASPECTOS METODOLÓGICOS

En este trabajo se reportan los hallazgos de un trabajo realizado a finales del segundo semestre del 2014 con 90 estudiantes de un programa de Licenciatura en Matemáticas de una Universidad pública colombiana: 28 del tercer semestre- quienes habían cursado dos cursos de didácticas de las matemáticas y tres cursos de cálculo-; 28 del quinto semestre –quienes habían cursado cuatro cursos de didáctica de las matemáticas y los mismos tres cursos de cálculo que los anteriores y ecuaciones diferenciales-, y 34 del octavo semestre -quienes habían cursado el programa en su totalidad-. Se siguió un proceso similar al de Piaget en sus investigaciones sobre el desarrollo del conocimiento. Es decir, se observó cuidadosamente la metamorfosis de los profesores en formación, mientras se interactuaba con ellos en este proceso. Se hizo un seguimiento a su progreso de estudiantes a profesores, comenzando por analizar la forma en que conciben los conocimientos disciplinares, hasta sus primeros pasos como profesores. A estos estudiantes se les pidió resolver un cuestionario que involucra funciones. Esto según (Shulman, 2005), revela e ilumina los complejos cuerpos de conocimientos y habilidades que se necesitan para que un profesor sea competente. Dicho cuestionario se muestra en la fig. 1. En este cuestionario se parte del registro gráfico como registro principal, hacia los registros aritmético analítico, aritmético algebraico y gráfico, como registros auxiliares. Se escogió esta situación porque permite relacionar las funciones con el contexto sociocultural, lo que facilita establecer congruencias entre elementos de dos o más representaciones de las funciones involucradas, comparar sus respectivos significados y encontrarles sentido al utilizarlos mientras se resuelve la situación.

Se utilizaron las calificaciones los estudiantes de cada grupo al resolver el cuestionario y se analizan las asociaciones entre las respuestas dadas a cada ítem con el grupo de donde estas provienen, esto se hizo utilizando tablas de contingencias con el coeficiente Chi-Cuadrado de Pearson a un nivel de significancia del 5% ($\alpha = 0,05$). Aquí por razones de espacio solo se analizarán algunas respuestas dadas a dos de las preguntas realizadas en el cuestionario. El enunciado del cuestionario es el que se muestra a continuación.

En la gráfica se muestran los costos de edición y los ingresos por la venta de una edición facsimilar del poema dramático de Alfonso Reyes, 'Ifigenia Cruel'.

Figura 1. Cuestionario base aplicado a los profesores en formación.



Fuente: <http://historiasdeactividades.blogspot.com/2007/09/ifigenia-cruel-de-alfonso-reyes.html>

Las cuestiones por las que se indaga se enunciarán antes del análisis de cada uno de ellos.

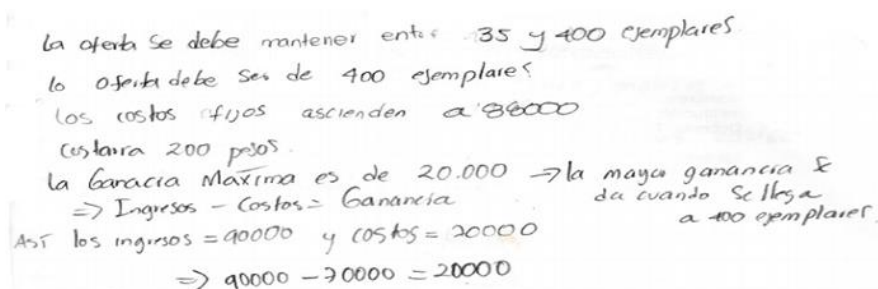
■ RESULTADOS Y ANÁLISIS

En la presentación de los resultados, para cada ítem se presenta una tripleta (i, j, k) donde " i " (entre 0 y 28) representa la cantidad de estudiantes del tercer semestre, " j " (entre 0 y 28) la de los del sexto semestre y " k " (entre 0 y 34) la de los del octavo semestre que hicieron referencia al tópico analizado en ese ítem. Y se presenta $P_{(r)i, j, k}$ donde $r = 3, 6$ u 8 semestre, para referir a un profesor en formación de alguno de los tres niveles.

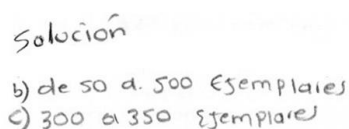
¿Entre qué valores se debe mantener la oferta para obtener Ganancias?

En este ítem se quiso indagar por el dominio de la función Ganancias en el contexto de la situación. Se esperaba que los profesores en formación realizaran un análisis visual, y a partir de ahí, obtuvieran sus respuestas. El 58,88% de los estudiantes presentaron respuestas acertadas a este ítem (13, 20, 20). En este aspecto se evidenció poca concordancia entre las respuestas al interior de los grupos ($\chi^2 = 7.450$, $P > 0.05$), es decir, sin tener en cuenta los aciertos y los errores, el grado de heterogeneidad en las respuestas intra-grupos fue alto, así las respuestas dadas a los demás ítems, al interior de cada grupo se enfocaron hacia aspectos diferentes al interior de cada uno de éstos.

En las Fig. 2 y 3 se muestran las soluciones de los profesores en formación $P_{(6)1}$ y $P_{(8)3}$, respectivamente, dados a varios ítems del cuestionario.

Figura 2. Respuestas dadas por P(6)1 al cuestionario.

la oferta se debe mantener entre 35 y 400 ejemplares.
lo oferta debe ser de 400 ejemplares
los costos fijos ascienden a 80000
costo variable 200 pesos.
la Ganancia Máxima es de 20.000 \rightarrow la mayor ganancia se
 \Rightarrow Ingresos - Costos = Ganancia da cuando se llega
Así los ingresos = 90000 y costos = 20000 a 400 ejemplares.
 $\Rightarrow 90000 - 70000 = 20000$

Figura 3. Respuesta dada por P(8)3 al tercer y cuarto ítems del cuestionario.

Solución
b) de 50 a 500 Ejemplares
c) 300 a 350 Ejemplares

¿Cuántos ejemplares se deben producir y vender para obtener la máxima Ganancia?

Al indagar por el intervalo donde se obtiene la máxima Ganancia, se esperaba que lo confundieran con el de los máximos Ingresos. Solo el 38,88% de los estudiantes pudo determinar el intervalo donde la Ganancia es máxima (12, 13, 10). La tendencia por grupos fue a dar respuestas similares al interior de éstos ($\chi^2 = 14.355$, $P < 0.05$), es decir, hubo homogeneidad tanto en aciertos como en desaciertos. En su mayoría (53,33%) los profesores en formación contemplaron como respuesta el intervalo [0, 700] ejemplares, quizás en virtud a que esos eran los extremos visibles en la gráfica, y en concordancia a lo reportado por Hitt (2003) cuando manifiesta que los estudiantes tienen una rara tendencia a dejarse llevar por lo visual, pero a pesar de ello no consideraron las representaciones geométricas como complementarias en su proceso de resolución del problema, y como se esperaba, (14, 11, 23) terminaron confundiendo la Ganancia máxima con los Ingresos máximos. En las Fig. 4 y 5 se muestran las soluciones de los profesores en formación P₍₃₎₁ y P₍₆₎₅, respectivamente, dados a varios ítems del cuestionario.

Figura 4. Respuesta dada por P(3)1 a los ítem correspondientes a Ingresos y Ganancias máximas.

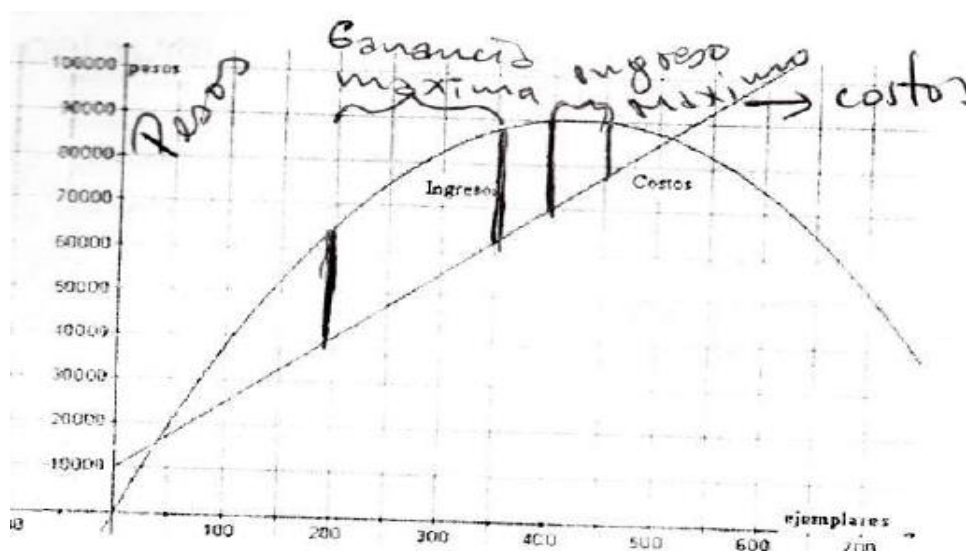


Figura 5. Respuesta dada por P(6)5 a varios ítems del cuestionario.

Entre 45 y 510 ejemplares
 $x \in (45, 510)$, $x = \text{ejemplares}$
 en la grafica que describe una parábola
 hay un máximo en el punto $(200, 90000)$,
 y en los costos el punto de la recta $(400, 90000)$
 indica el costo de 90000 al producir 400 ejemplares.
 así se tiene $90.000 - 70.000 = 20.000$
 Sería 20.000 la ganancia máx

$$C(x) = 750x + 10000$$

$$I(x) = ax^2 - bx - 10000 \quad \text{con } a < 0$$

$$g(x) = \int_a^b (ax^2 - bx - 10000) dx$$

Los resultados evidencian ciertas debilidades formativas de los futuros profesores en el manejo de la función: en el diseño y ejecución de estrategias que permitan poner los contenidos del concepto en un lugar comprensible para los estudiantes del nivel básico; con el reconocimiento de la función en el contexto donde se les presentó; poca claridad al momento de aplicar los conceptos y de encontrar recursos apropiados para hacerlo; para identificar los elementos de la función y cómo se relacionan. En general se nota en los estudiantes hacen poco uso de los diferentes modos de expresión, tales como el verbal, el gráfico o el simbólico, así como de las transformaciones tipo

conversión o tipo tratamiento entre los registros de una función; lo que denota que el nivel del lenguaje matemático que usan no es el más adecuado. Y según Godino, Batanero y Font (2003, p.66) si una persona “sabe matemáticas ha de ser capaz de usar el lenguaje y conceptos matemáticos para resolver problemas. No es posible dar sentido pleno a los objetos matemáticos si no los relacionamos con los problemas de los que han surgido”.

■ CONCLUSIONES

Se encontraron serias dificultades relacionadas con: la identificación y uso de los interceptos de las funciones sin ayuda gráfica; el análisis de sus valores extremos, así como sus intervalos de crecimiento; para modelarla matemáticamente o realizar su gráfica, e identificar la pendiente de una función lineal. La carencia en el conocimiento específico del contenido de las funciones son evidentes y manifiestas cuando los formadores en formación deben reconocer sus elementos en una situación funcional y hacer las transformaciones requeridas en planeación de las clases, en las explicaciones durante la clase o en el análisis de las producciones de los estudiantes luego de la clase. Estos aspectos son requeridos para hacer una transposición didáctica adecuada de este concepto y así, facilitar su comprensión por parte de los estudiantes del nivel que se oriente. También se evidencia la debilidad en el conocimiento matemático para enseñar (Sgreccia y Massa, 2012) esto puede deberse a la falta de oportunidades en el trabajo conceptual del objeto función y su desplazamiento por el habitual trabajo de lo algebraico.

Las dificultades encontradas en los estudiantes, desde los planteamientos de D’Amore (2009), frente a lo que se denomina la renuncia del estudiante a la devolución y a la incapacidad para implicarse en la actividad propuesta, se hallan ligadas a la incapacidad para realizar transformaciones tipo conversión y tipo tratamiento, quizás por falta de una didáctica específica dentro del proceso de formación que reciben a nivel institucional.

■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ball, D., Thames, M. & Phelps, G. (2008). “Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special?”. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- D’Amore, B. (2009). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Revista Científica*, 11, 150-164.
- Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del conocimiento*. Cali: Universidad del Valle.
- Godino, J. Batanero, C. & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada: Universidad de Granada.
- Godino, J. Bencomo, D. Font, V. & Wilhelmi, M. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Revista Paradigma*, 27(2), 1-24.

- Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 1(1), 5-21.
- Hitt, F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 213-223.
- Peirce, Ch. (1974). *La ciencia de la semiótica*. Buenos Aires: Ediciones Nueva Visión.
- Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. *Revista de currículum y formación del profesorado*, 9(2), 1-30.
- Sgreccia, N. & Massa, M. (2012). Conocimiento especializado del contenido' de estudiantes para profesor y docentes noveles de matemáticas. *Revista Educación Matemática*, 24(3), 33-66.